Глава 8. Линейные дискретные системы

8.1.1. Описание ЛДС во временной области

Основной характеристикой ЛДС во временной области является импульсная характеристика (ИХ).

Соотношение вход/выход ЛДС в виде *формулы свертки*:

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h(n-m)\,x(m) = \sum_{m=0}^{\infty} h(m)\,x(n-m)\,. \tag{8.1}$$

Соотношение вход/выход ЛДС в виде *разностного уравнения* (РУ):

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i x(n-i) - \sum_{k=1}^{M-1} a_k\, y(n-k)\,, \tag{8.2}$$

По виду РУ различают два типа ЛДС:

- *рекурсивная* ЛДС;
- *нерекурсивная* ЛДС.

Рекурсивные и нерекурсивные ЛДС имеют соответственно *бесконечную* и *конечную* ИХ:

- БИХ ЛДС (IIR — Infinite Impulse Response);
- КИХ ЛДС (FIR — Finite Impulse Response).

В MATLAB вычисление реакции по формуле свертки (8.1) выполняется с помощью функции:

```
y = conv(h,x)
```

где `h` — вектор отсчетов ИХ длины N_1; `x` — вектор отсчетов воздействия длины N_2; `y` — вектор отсчетов реакции длины $L = N_1 + N_2 - 1$ (длина свертки).

Вычисление реакции по РУ (8.2) выполняется с помощью функции:

```
y = filter(b,a,x)
```

где `b`, `a` — векторы коэффициентов $[b_0, b_1, \ldots, b_{N-1}]$ и $[1, a_1, \ldots, a_{M-1}]$; `x` — вектор отсчетов воздействия; `y` — вектор отсчетов реакции с длиной, равной длине воздействия.

Импульсная характеристика вычисляется с помощью функции:

```
h = impz(b,a,N)
```

где `b`, `a` — определены ранее для функции `filter`; `N` — количество отсчетов (длина) ИХ; `h` — вектор отсчетов ИХ.

Импульсная характеристика может также вычисляться с помощью функции `filter`, если в качестве воздействия используется цифровой единичный импульс (7.10).

8.1.2. Описание ЛДС в *z*-области

Основной характеристикой ЛДС в z-области является передаточная функция $H(z)$:

$$H(z)=\frac{\sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i}}{1+\sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}}. \qquad (8.4)$$

Комплексно сопряженные нули $z_{\circ k1,2}$ и полюсы $z_{*k1,2}$ представляют в показательной форме, где аргументы — углы (в радианах) на комплексной z-плоскости:

$$\begin{cases} z_{\circ k1,2} = r_{\circ k} e^{\pm j\varphi_{\circ k}}; \\ z_{*k1,2} = r_{*k} e^{\pm j\varphi_{*k}}. \end{cases} \qquad (8.6)$$

Разновидности передаточной функция (8.4):

- произведение простейших множителей:

$$H(z)=b_0\prod_{k=1}^{M-1}\frac{(1-z_{\circ k}z^{-1})}{(1-z_{*k}z^{-1})}, \qquad (8.7)$$

  где $z_{\circ k}$, z_{*k} — соответственно k-е нуль и полюс передаточной функции (8.4).

- произведение множителей второго порядка:

$$H(z)=\prod_{k=1}^{L}\frac{b_{0k}+\tilde{b}_{1k}z^{-1}+\tilde{b}_{2k}z^{-2}}{1+a_{1k}z^{-1}+a_{2k}z^{-2}}, \qquad (8.8)$$

  где b_{0k}, $\tilde{b}_{1k}$, $\tilde{b}_{2k}$, a_{1k}, a_{2k} — *вещественные* коэффициенты; L — количество звеньев, 2-го порядка.

  В MATLAB используется представление передаточной функции (8.8) в эквивалентном виде, получаемом при вынесении за скобки коэффициентов b_{0k}:

$$H(z)=G\prod_{k=1}^{L}\frac{1+b_{1k}z^{-1}+b_{2k}z^{-2}}{1+a_{1k}z^{-1}+a_{2k}z^{-2}}, \qquad (8.9)$$

  где $G=b_{01}\cdot b_{02}\cdot\ldots\cdot b_{0L}$ — коэффициент усиления, а соответствующие коэффициенты связаны соотношениями: $b_{1k}=\tilde{b}_{1k}/G$; $b_{2k}=\tilde{b}_{2k}/G$;

- сумма простых дробей:

$$H(z)=\sum_{k=1}^{M-1}H_k(z)=\sum_{k=1}^{M-1}\frac{A_k}{1-z_{*k}z^{-1}}\,, \qquad (8.10)$$

где z_{*k} — простой (не кратный) k-й полюс передаточной функции (8.4); A_k — коэффициент разложения при k-м полюсе.

В MATLAB для представления передаточной функции (8.4) в виде произведения простейших множителей (8.7) используется функция:

```
[q,p,K] = tf2zpk(b,a)
```

где `b`, `a` — векторы коэффициентов числителя $[b_0, b_1, \ldots, b_{N-1}]$ и знаменателя $[1, a_1, \ldots, a_{M-1}]$ передаточной функции (8.4); `q`, `p` — векторы-столбцы нулей $z_{\circ k}$ и полюсов z_{*k} передаточной функции (8.7), представленные в алгебраической форме; `K` — коэффициент усиления b_0 в (8.7).

Представление передаточной функции (8.4) в виде произведения множителей второго порядка (8.9) выполняется с помощью функции:

```
[s,G] = tf2sos(b,a)
```

где `b`, `a` — определены ранее для функции `tf2zpk`; `G` — коэффициент усиления G в (8.9); `s` — матрица коэффициентов числителей и знаменателей биквадратных звеньев передаточной функции (8.9) в виде:

$$\begin{bmatrix} 1\; b_{11}\; b_{21}\; 1\; a_{11}\; a_{21} \\ 1\; b_{11}\; b_{21}\; 1\; a_{11}\; a_{21} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1\; b_{1L}\; b_{2L}\; 1\; a_{1L}\; a_{2L} \end{bmatrix}. \qquad (8.12)$$

Для представления передаточной функции (8.4) в виде суммы простых дробей (8.11) применяется функция:

```
[r,p,c] = residuez(b,a)
```

где `b`, `a` — определены ранее для функции `tf2zpk`; `r`, `p` — векторы-столбцы коэффициентов разложения A_k и полюсов z_{*k} в (8.11), представленные в алгебраической форме; `c` — целая часть C в (8.11); при ее отсутствии выводится пустая матрица `c=[]`.

Карта нулей и полюсов передаточной функции выводится с помощью функции:

```
zplane(b,a)
```

8.1.3. Описание ЛДС в частотной области

В MATLAB частотная характеристика (8.15) вычисляется с помощью функции `freqz` одного из следующих форматов:

```
H = freqz(b,a,f,Fs)
H = freqz(b,a,w)
```

```
H = freqz(b,a,N)
```

где: `b`, `a` — определены ранее для функции `tf2zpk` *(см. разд. 8.1.2)*; `f` — вектор частот в герцах; `Fs` — частота дискретизации $f_д$ (Гц); `w` — вектор нормированных частот $\hat{\omega}$ (рад); `N` — количество точек ЧХ; в отсутствии параметра по умолчанию `N = 512`; `H` — вектор комплексных значений ЧХ.

Модуль частотной характеристики (АЧХ) определяется с помощью функции `abs(H)`, а аргумент (ФЧХ) — с помощью функции `angle(H)` (см. табл. 1.4).

8.1.4. Структуры звеньев 2-го порядка

Структура (структурная схема) ЛДС отображает алгоритм вычисления реакции по РУ и определяется *видом передаточной функции*.

Для рекурсивных звеньев 2-го порядка с передаточной функцией

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \tag{8.17}$$

и разностным уравнением

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2) - a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2)$$

поддерживаются следующие структуры:

- прямая — Direct-Form I;
- прямая транспонированная — Direct-Form I Transposed;
- прямая каноническая — Direct-Form II;
- прямая каноническая транспонированная — Direct-Form II Transposed.

В MATLAB структуры описываются в виде объекта `dfilt` (от англ. *Discrete-time filter object*):

```
Hd = dfilt.structure(b,a)
```

где `Hd` — имя объекта; `dfilt` — тип объекта; *`structure`* — функция, задающая конкретную структуру объекта `Hd` (табл. 8.1).

Свойства объекта `dfilt` с именем `Hd` для рекурсивных звеньев 2-го порядка включают в себя:

- `FilterStructure` — структура звена;
- `Arithmetic` — форма представления данных;
- `Numerator` — коэффициенты числителя передаточной функции;
- `Denominator` — коэффициенты знаменателя передаточной функции;
- `PersistentMemory` — начальные условия при вычислении реакции; значение `false` соответствует ННУ *(см. разд. 8.1.1)*.

Структуры звеньев 2-го порядка, описываемые в виде объектов `dfilt`, приведены в табл. 8.1.

Таблица 8.1. Функции `structure` и структуры рекурсивных звеньев 2-го порядка

Функция *structure*	**Структура рекурсивного звена 2-го порядка**
df1	Direct-Form I (прямая, см. рис. 8.1, *а*)
df1t	Direct-form I Transposed (прямая транспонированная, см. рис. 8.1, *б*)
df2	Direct-Form II (прямая каноническая, см. рис. 8.1, *в*)
df2t	Direct-Form II Transposed (прямая каноническая транспонированная, см. рис. 8.1, *г*)

8.3. Задание на лабораторную работу

Задание на лабораторную работу связано с моделированием рекурсивного звена 2-го порядка и анализом его характеристик и включает в себя следующие пункты:

1. Вычисление импульсной характеристики (идентификатор `h1`) длины N_1 с помощью функции `impz` с выводом графика.

   Записать аналитическую формулу ИХ рекурсивного звена 2-го порядка с учетом ННУ. Пояснить, чему в действительности равна длина ИХ.

2. Вычисление импульсной характеристики (идентификатор `h2`) с помощью функции `filter` с выводом графика.

   Пояснить, что и почему выбрано в качестве воздействия.

3. Вычисление реакции $y_1(n)$ (идентификатор `y1`) по формуле свертки.

   В качестве воздействия $x(n)$ длины N_2 выбрать дискретный прямоугольный импульс (идентификатор `x`):

   $$x(n)=\begin{cases}1, & 0\le n<\mathrm{int}(N_2/2);\\ 0, & \mathrm{int}(N_2/2)\le n\le (N_2-1).\end{cases} \qquad (8.18)$$

   Функция int определена в *разд. 8.1.2*.

   Для моделирования воздействия (8.18) использовать function-файл `input_1` *(см. разд. 8.4.1)*.

   Вывести график воздействия $x(n)$ и два графика реакции $y_1(n)$ с длиной, равной длине свертки L, и длиной, ограниченной до длины воздействия.

   Записать формулу свертки.

   Пояснить:

   - чему равна длина импульса (8.18);
   - чему равна длина свертки аналитически и по графику:
   - почему ее ограничивают до длины воздействия.

4. Вычисление реакции $y_2(n)$ (идентификатор `y2`) по разностному уравнению.

   Задать воздействие $x(n)$ (8.18). Вывести графики воздействия и реакции.

   Сравнить графики реакций $y_1(n)$ (см. п. 3) и $y_2(n)$.

   Записать РУ рекурсивного звена 2-го порядка с заданными коэффициентами.

   Пояснить, чему равны длины воздействия и реакции.

5. Вычисление параметров передаточной функции в виде произведения простейших множителей.

   Вычислить нули, полюсы и коэффициент усиления (идентификаторы `q`, `p` и `K`) передаточной функции (8.17).

   Записать нули и полюсы в алгебраической и показательной формах и пояснить связь между ними.

   Выразить значение аргумента полюса и нуля относительно π, например, значению $\varphi = 1,7654$ будет соответствовать:

$$\varphi = 1,7654 \approx 0,562\pi . \tag{8.19}$$

   Представить передаточную функцию в виде произведения простейших множителей с нулями и полюсами в показательной форме.

6. Вычисление параметров передаточной функции в виде произведения множителей второго порядка.

   Вычислить коэффициент усиления (идентификатор `G`) и матрицу коэффициентов (идентификатор `s`) передаточной функции.

   Представить передаточную функцию в виде произведения множителей второго порядка.

7. Вычисление параметров передаточной функции в виде суммы простых дробей.

   Вычислить полюсы, коэффициенты разложения и целую часть (идентификаторы `p`, `r` и `c`) передаточной функции.

   Записать полюсы и коэффициенты разложения в алгебраической и показательной формах.

   Выразить значения аргумента полюса и коэффициента разложения в виде (8.19).

   Представить передаточную функцию в виде суммы простых дробей с полюсами и коэффициентами разложения в показательной форме.

8. Вывод карты нулей и полюсов.

   Изобразить карту нулей и полюсов.

   Пояснить:

   - является ли рекурсивное звено устойчивым;
   - совпадают ли значения нулей и полюсов с вычисленными в п. 5.

9. Вычисление АЧХ и ФЧХ в шкале нормированных частот.

Вычислить АЧХ и ФЧХ (идентификаторы `MAG_w` и `PHASE_w`) в шкале нормированных частот $\hat{\omega}$ (идентификатор `w`) и вывести их графики.

Сравнить значения полученной АЧХ на границах основной полосы со значениями, вычисленными аналитически по формулам:

$$A(0) = |H(z)|\Big|_{z=e^{j0}=1} = \left|\frac{b_0 + b_1 + b_2}{1 + a_1 + a_2}\right|; \tag{8.20}$$

$$A(\pi) = |H(z)|\Big|_{z=e^{j\pi}=-1} = \left|\frac{b_0 - b_1 + b_2}{1 - a_1 + a_2}\right|. \tag{8.21}$$

Пояснить:

- чему равны границы основной полосы частот;
- соответствие между картой нулей и полюсов и видом АЧХ;
- какому значению АЧХ соответствует скачок на π, если он имеется;
- какие частотные составляющие воздействия, низкие или высокие, оказались преимущественно подавленными в реакции.

10. Вычисление АЧХ и ФЧХ в шкале абсолютных частот.

Вычислить АЧХ и ФЧХ (идентификаторы `MAG` и `PHASE`) в шкале частот f (Гц) (идентификатор `f`) при заданной частоте дискретизации $f_д$ и вывести их графики.

Пояснить:

- чему равны границы основной полосы частот;
- соответствие частотами $\hat{\omega}$ и f .

11. Описание структуры рекурсивного звена.

Описать четыре разновидности структур рекурсивного звена 2-го порядка (см. табл. 8.2) в виде объектов `dfilt` с именами `Hd1`—`Hd4`.

Пояснить:

- что отображает структура и чем определяется ее вид;
- свойства каждого из объектов `dfilt`.

12. Анализ влияния нулей и полюсов на вид АЧХ.

В отдельных полях одного графического окна вывести карты нулей и полюсов и соответствующие нормированные АЧХ (идентификатор `MAGN`) в шкале нормированных частот $\hat{\omega}$ для различных вариантов коэффициентов передаточной функции, представленных в табл. 8.3, которые вычисляются автоматически.

Для одновременного вычисления нормированных АЧХ при четырех вариантах коэффициентов, коэффициенты числителей и знаменателей представить в виде матриц размером 4×3.

Пояснить соответствие между картой нулей и полюсов и видом АЧХ.

Таблица 8.3. *Варианты коэффициентов*

Вариант	**Векторы коэффициентов передаточной функции**	
	числителя	**знаменателя**
1	`[1 0 0]`	`[1 a1 a2]`
2	`[1 0 0]`	`[1 -a1 a2]`
3	`[1 0 0]`	`[1 a1 1.2*a2]`
4	`[1 1 0]`	`[1 a1 a2]`

8.4. Типовой script-файл для выполнения лабораторной работы

Перед выполнением работы должна быть представлена табл. 8.2 исходных данных для своего номера бригады $N_{бр}$.

Для *запуска* лабораторной работы необходимо обратиться к script-файлу `lr_08` по его имени:

```
>> lr_08
```

Для *принудительного снятия* script-файла с выполнения следует нажать комбинацию клавиш <Ctrl>+<Break>.

При выполнении script-файла текущие окна с графиками *не закрывать*.

Листинг script-файла `lr_08` имеет вид:

```
>> type lr_08
```